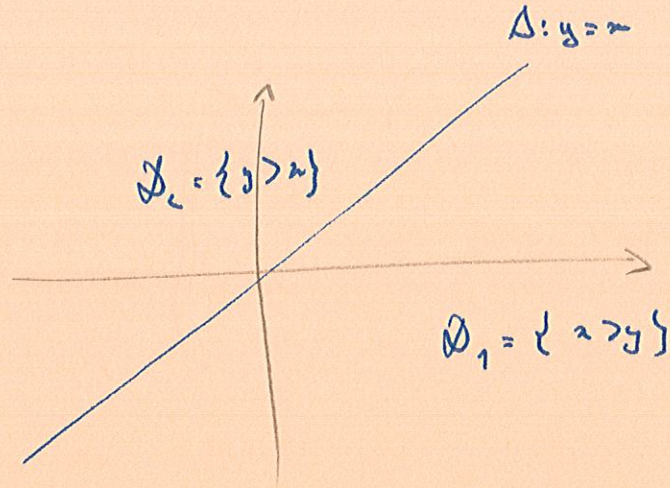
TD 4

Exo 1 : 1ère méthode :



$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$$

$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_1 \quad f(x,y) = x$

$\quad\ \ \in \mathcal{D}_2 \quad f(x,y) = y$

f est continue sur $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ (ouvert de $\mathbb{R}^2$). Reste à vérifier que f est continue sur Δ :

Soit $(a,a) \in \Delta$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

+ si $(x,y) \in \mathcal{D}_1$ $\quad |f(x,y) - f(a,a)| = |x-a|$

+ si $(x,y) \in \mathcal{D}_2$ $\quad |f(x,y) - f(a,a)| = |y-a|$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0 \quad \|(x,y) - (a,a)\|_\infty < \varepsilon$ implique

$$|f(x,y) - f(a,a)| \leq \|(x,y) - (a,a)\|_\infty < \varepsilon.$$

∴ autrement dit f est $\mathcal{C}^0$ sur Δ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2ème méthode :

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sup(x,y) = \max\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right)$

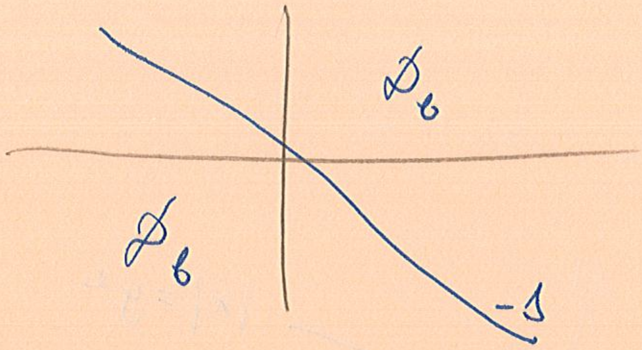
preuve : si $x > y \qquad |x-y| = x-y$ et $\frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$

si $y > x \qquad |x-y| = y-x$ et $\frac{1}{2}(x+y+y-x) = y$. $\square$

Ainsi f est composé de fonctions (uniformément) continues sur $\mathbb{R}^2$ et est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$ (2)

* f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus -\Delta$ où $-\Delta = \{y = -x\}$



On sait que l'addition $(x,y) \mapsto x+y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

la fonction $\sin : u \mapsto \sin u$ est continue sur $\mathbb{R}$

la fonction inverse $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ ——— sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\therefore$ Par composition et produit la fonction f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{D}_f$.

* Analyse : Soit $(x_0, -x_0)$ un point de $-\Delta$. Pour tout $\varepsilon \neq 0$ on a $(x_0, -x_0+\varepsilon) \in \mathcal{D}_f$ et

$$f(x_0, -x_0+\varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$$

le seul prolongement par continuité possible est $f(x_0, -x_0) = 1$.

* Synthèse. On pose $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \notin -\Delta. \\ 1 & \text{si } (x,y) \in -\Delta. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$ car :

$$\left| \frac{\sin(x+y)}{x+y} - 1 \right| = \left| \frac{\sin(x+y) - (x+y)}{x+y} \right| = \frac{O(|x+y|^3)}{|x+y|}$$

car $\sin(x+y) = u \underbrace{- \dfrac{u^3}{3!} + \dfrac{u^5}{5!} - \cdots}_{= O(|u|^3)}$ qd $u \to 0$.

Ainsi $\left|\frac{\sin(x+y)}{x+y} - 1\right| \leq \text{cte}\ |x+y|^2$

$$= \text{cte}\ |x - x_0 + y + x_0|^2$$

$$\leq \text{cte}\ \left(|x - x_0| + |y + x_0|\right)^2$$

$$= \text{cte}\ \underbrace{\|(x,y) - (x_0, -x_0)\|_1^2}_{\to 0 \text{ qd } (x,y) \to (x_0, -x_0)}$$

remarque :

<u>Exercice 3</u> : $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^4}$

i) f est continue sur $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car :

* La fonction $u \longmapsto |u|^\alpha$ (composée de $\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ u \to |u|\end{array}$ et $\begin{array}{c}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ v \longmapsto v^\alpha\end{array}$) est continue.
* les fonctions puissance sont C^0 sur $\mathbb{R}$ ...

Par composition et produit, f est C^0 sur $\mathcal{D}_1$.

ii) en $(0,0)$: on a $f(y^2, y) = \dfrac{y^{2\alpha} y}{2 y^4} = \dfrac{1}{2} y^{2\alpha - 3} \xrightarrow[y \to 0]{} 0 = f(0,0)$

ssi $2\alpha - 3 > 0$.

$\therefore$ f n'est pas continue en $(0,0)$ si $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

$\therefore$ Reste à voir si f est continue en $(0,0)$ si $\alpha > \frac{3}{2}$:

* Si $|x| \leq y^2$ alors : $\left|\dfrac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^4}\right| \leq \dfrac{|y^{2\alpha+1}|}{|y|^4} = |y|^{2\alpha - 3} = \|(x,y)\|_2^{2\alpha-3}$
* si $|x| > y^2$ alors : $\left|\dfrac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^4}\right| \leq \dfrac{|x|^\alpha |x|^{1/2}}{|x|^2} = |x|^{\alpha - 3/2} = \|(x,y)\|_2^{\alpha - \frac{3}{2}}$

et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|f(x,y)| \leq \max\left\{\|(x,y)\|_2^{2\alpha-3}, \|(x,y)\|_2^{\alpha - 3/2}\right\} \xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to 0]{} 0$$

Exercice 4 :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x$

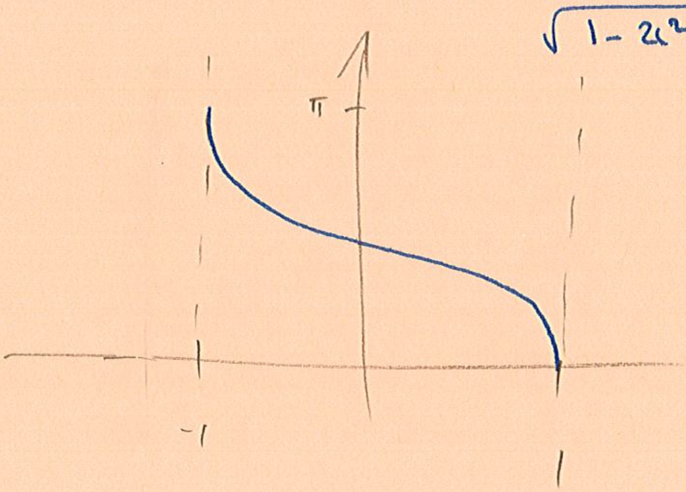
2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\left(e^{xy}\right) - x \sin\left(e^{xy}\right) e^{xy} y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 \sin\left(e^{xy}\right) e^{xy}$

3) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_y^x \cos(e^t)\,dt = \cos(e^x)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \cos(e^t)\,dt = -\cos(e^y).$$

Exercice 5 :

rappels : $u \mapsto \operatorname{Arccos}(u)$ est définie sur $[-1,1]$ et est dérivable sur $]-1,1[$ et $\arccos'(u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$.



* la fonction $f(x,y) = \operatorname{Arccos}\left(1+(x-y)^2\right)$ est définie sur la droite $x-y=0$. Ce n'est pas un ouvert du plan et les définitions du cours ne s'appliquent pas ....

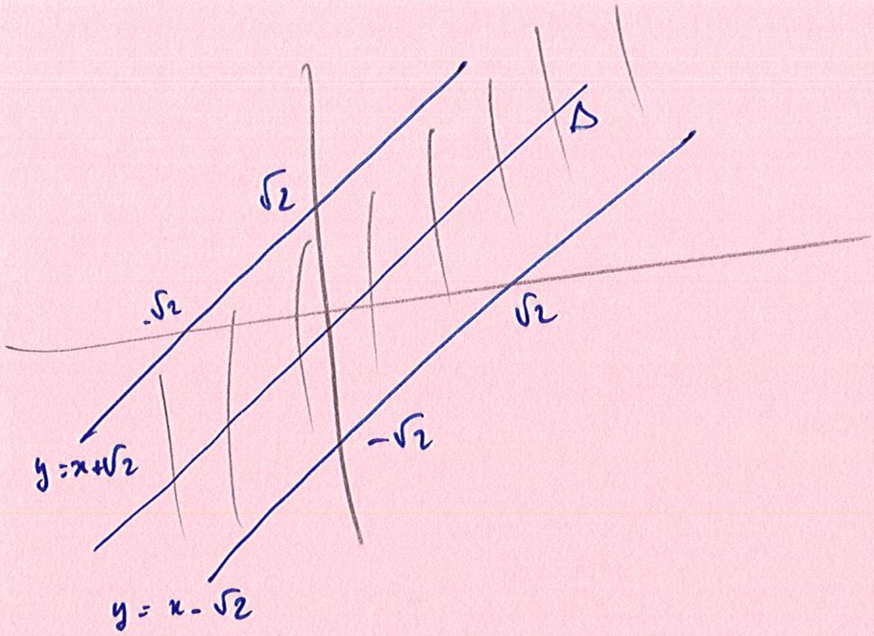
* la fonction $f(x,y) = \operatorname{Arccos}\left(1-(x-y)^2\right)$ est définie sur :

$$-1 < 1-(x-y)^2 < 1$$

soit $\quad 0 < (x-y)^2 < 2$

$$\text{ssi} \begin{cases} x \neq y \\ -\sqrt{2} < x - y < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} x \neq y \\ -\sqrt{2} < x - y \\ x - y < \sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{ssi} \begin{cases} x \neq y \\ y < x + \sqrt{2} \\ y > x - \sqrt{2} \end{cases}$$

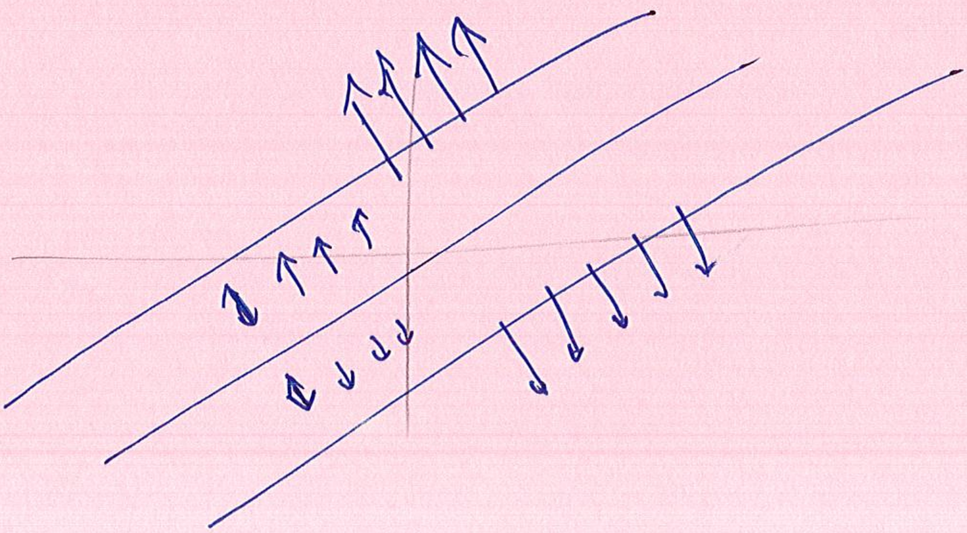


les dérivées partielles de f existent pour les (x,y) dans la zone hachurée privée de la droite $\Delta = \{y = x\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1-(x-y)^2)^2}} \times \left(-2(x-y)\right) = \frac{2(x-y)}{\sqrt{1-(1-(x-y)^2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(x-y)}{\sqrt{1-(1-(x-y)^2)^2}} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

remarque : le gradient $\nabla f(x,y)$ est $\perp$ aux lignes de niveau $x - y = a$ ...



Exercice 6 : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^x = e^{x \ln(x^2+y^2)}$$

1) f est C^0 en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

* montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(x^2+y^2) = 0$

$$|x \ln(x^2+y^2)| \leq |x| \ln(\|(x,y)\|_2^2)$$

$$\leq \underbrace{2\|(x,y)\| \ln(\|(x,y)\|_2)}_{\xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to 0]{} 0}$$

par croissances comparées.

* la fonction $u \mapsto e^u$ est C^0 en 0 et on a

$$\text{bien } \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 1$$

2) Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles se calculent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x \ln(x^2+y^2)} \left(\ln(x^2+y^2) + x \frac{2x}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x \ln(x^2+y^2)} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right)$$

3) * la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe ssi $x \mapsto \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ admet une limite en 0.

$$\frac{e^{x \ln x^2} - 1}{x} = \frac{x \ln(x^2) + O(x^2 \ln^2(x^2))}{x} = \underbrace{\ln(x^2)}_{\to -\infty} + \underbrace{O\left((\sqrt{x}\ln(x^2))^2\right)}_{\to 0}$$

qd $x \to 0$.

car $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \dots$

Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à x.

* La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe ssi $\lim \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ existe

$$\frac{e^0-1}{y} = 0 \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

existe.

Exercice 7 :

i) $$P(\tau, s) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau, s) = -e^{s/c_v}(1-\gamma)\tau^{-\gamma}.$$

$$T(\tau, s) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}(\tau,s) = \frac{\tau^{1-\gamma} e^{s/c_v}}{c_v}.$$

ii) $$\frac{P\tau}{T} = -\cancel{e^{s/c_v}}(1-\gamma)\cancel{\tau^{-\gamma}} \times \frac{\cancel{\tau}\, c_v}{\cancel{\tau^{1-\gamma}}\cancel{e^{s/c_v}}} = \underbrace{-(1-\gamma)c_v}_{cte}.$$

Exercice 8 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) * f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par composition et opération usuelle sur les fonctions continues.

* en $(0,0)$: $$|f(x,y) - 0| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

car $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$

2) on a $\begin{cases} x \longmapsto f(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(0,y) = 0 & \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$

Ainsi, si f est diff en $(0,0)$ sa différentielle ne peut être que l'application nulle. Étudions :

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0.x - 0.y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$g(ay,y) = \frac{a\,y^2}{(a^2+1)\,y^2} = \frac{a}{a^2+1} \underset{(x,y)\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

$\therefore$ f n'est pas diff. en $(0,0)$.

<u>Exercice 9</u> : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$ par les opérations usuelles

* Continuité en $(0,0)$:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+|y|} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{y^2+x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

et f est bien $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$.

* différentiabilité en $(0,0)$: $\begin{cases} x \mapsto f(x,0) = 0 \\ y \mapsto f(0,y) = 0 \end{cases}$

Si f est diff en $(0,0)$ sa diff. ne peut être que l'application nulle.

Vérifions que $\displaystyle \varepsilon(x,y) = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - 0|}{\|(x,y)\|_{\infty}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

on a : $\displaystyle \varepsilon(x,y) \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} \times \frac{1}{\max\{|x|,|y|\}} \right|$

Ptu si pte !

$*$ si $|x| > |y|$ alors $\displaystyle |\varepsilon(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} \times \frac{1}{|x|} \right|$

$$\leq \frac{|x|^2 |y|}{|y||x|} = |x| \underset{\text{qd } \|(x,y)\|_\infty \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$*$ si $|x| < |y|$ alors $\displaystyle |\varepsilon(x,y)| \leq \frac{|y|^3}{|y|\,|y|} = |y| \underset{\text{qd } \|(x,y)\|_\infty \to 0}{\longrightarrow} 0.$

Dans les 2 cas $|\varepsilon(x,y)| \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$ et f est diff en $(0,0)$

2) Soit $a \neq 0$ on a : $f(a,0) = 0$

$*$ $\displaystyle \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$

$*$ $\displaystyle \frac{f(a,h) - f(a,0)}{h} = \frac{\frac{a^2 h}{a^2 + |h|} - 0}{h} = \frac{a^2}{a^2 + |h|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1.$

et $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 1.$

Si f est différentiable en $(a,0)$ sa diff ne peut être que l'application $(h,k) \longmapsto k$

Vérifions que $\displaystyle \varepsilon(x,y) = \frac{|f(a+x,y) - f(a,0) - y|}{\|(x,y)\|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

plus simple !

* si $|x| \geq |y|$ alors $\|(x,y)\|_\infty = |x|$ et

$$|\varepsilon(x,y)| = \left| \frac{f(a+x,y)-y}{x} \right| = \frac{|y|^2}{(a+x)^2+|y|} \times \frac{1}{|x|}$$

$$\leq \frac{|y|}{(a+x)^2+|y|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

car $|x| \geq |y| \Rightarrow \frac{|y|}{|x|} \leq 1$

* si $|y| \geq |x|$ alors $\|(x,y)\|_\infty = |y|$ et

$$|\varepsilon(x,y)| = \left| \frac{f(a+x,y)-y}{y} \right| = \frac{|y|}{(a+x)^2+|y|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

i.e. dans tous les cas $|\varepsilon(x,y)| \to 0$ qd $(x,y) \to (0,0)$

et f est bien diff sur $\mathbb{R}^2$ ...

Exercice 10 : $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$

1) Determiner l'image de f : on a

$$\left| \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{1+x^2+y^2} \right| + \left| \frac{y}{1+x^2+y^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right| + \left| \frac{y}{1+y^2} \right|$$

$$\leq 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

De plus $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ et $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -1$

$$f(x,y) = c \qquad (*)$$

ssi $x + y = c + cx^2 + cy^2$

ssi $cx^2 - x + cy^2 - y + c = 0$

ssi $c\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{2c}\right)^2\right) - \frac{c}{4c^2}$
$\qquad + c\left(y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{2c}\right)^2\right) - \frac{c}{4c^2} + c = 0$

ssi $c\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{2c} + c = 0$

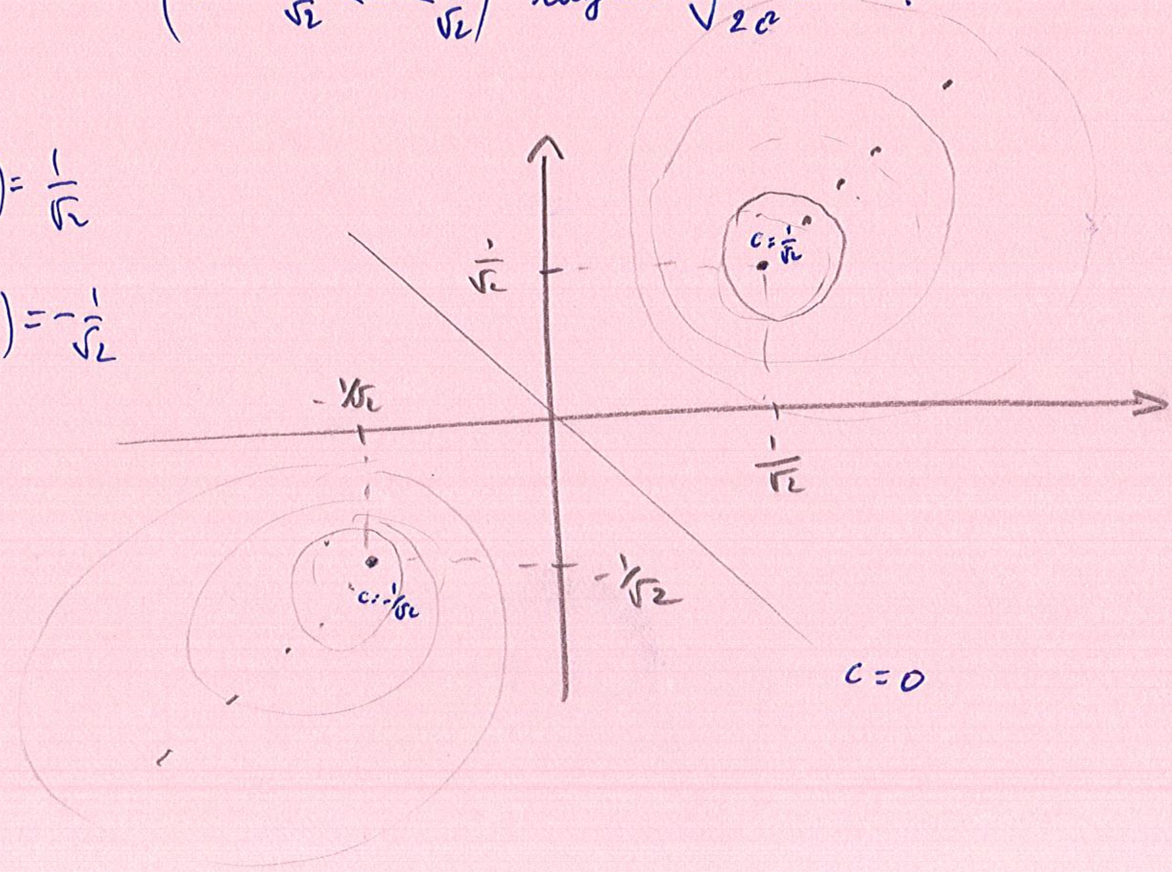
ssi $\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{2c^2} - 1 = \frac{1-2c^2}{2c^2}$

(*) a une solution pour :

* $c = 0$: $\{y = -x\}$ droite
* $0 < c^2 < \frac{1}{2}$: cercle de centre $\frac{1}{2c}(1,1)$ et de
  $\left(\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < c < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ rayon $\sqrt{\frac{1}{2c^2} - 1}$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



2) les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1 - x^2 - 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1 + x^2 - 2xy - y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

3) l'équation du plan tg en $(0,0)$:

$$z = \overbrace{f(0,0)}^{=0} + x \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{=1} + y \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}^{=1}$$

$$z = x + y$$

Exercice 11 :

rappel : $f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|h\|)$

$$f(2,2\,;4,9) = f(2,5) + 0,2 \times 1 + (-0,1) \times -1 + o(\|h\|)$$

$$= 6 + 0,2 + 0,1 + o(\|h\|)$$

$$\simeq 6,3 .$$

Exercice 12 : $f(z) = \|z - a\|_2^{\alpha}$.

1) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$

courbes de niveau : cercle de centre a et de rayon $\sqrt{c}$.

* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)$
* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-2)$

$$\nabla f(x,y) = 2\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] .$$

2) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

ligne de niveau cercle de centre a et de rayon c.

Si $(x,y) \neq a$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x-1}{\|(x,y)-a\|} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y-2}{\|(x,y)-a\|}$$

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)-a\|}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right)$$

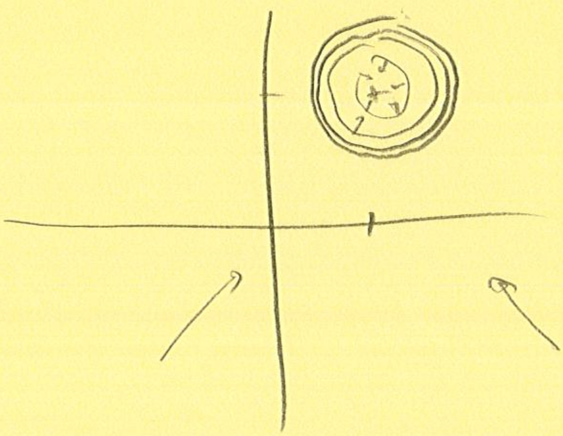
remarque $\|\nabla f(x,y)\| = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si $(x,y) = a$

$$\frac{f(1+\varepsilon, 2) - f(1,2)}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \mathrm{sig}(\varepsilon) \begin{cases} \nearrow -1 \text{ si } \varepsilon < 0 \\ \searrow 1 \text{ si } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

pas de limite qd $\varepsilon \to 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ n'existe pas.

$\nabla f(a)$ n'est pas défini !



$\|x-a\|^2$

équidistante

$\|x-a\|$

Exercice 13 :

1) $f(r,\theta,z) = (r\cos\theta \, , r\sin\theta, z)$

$$J_f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_f(r,\theta,z) = r \neq 0 .$$

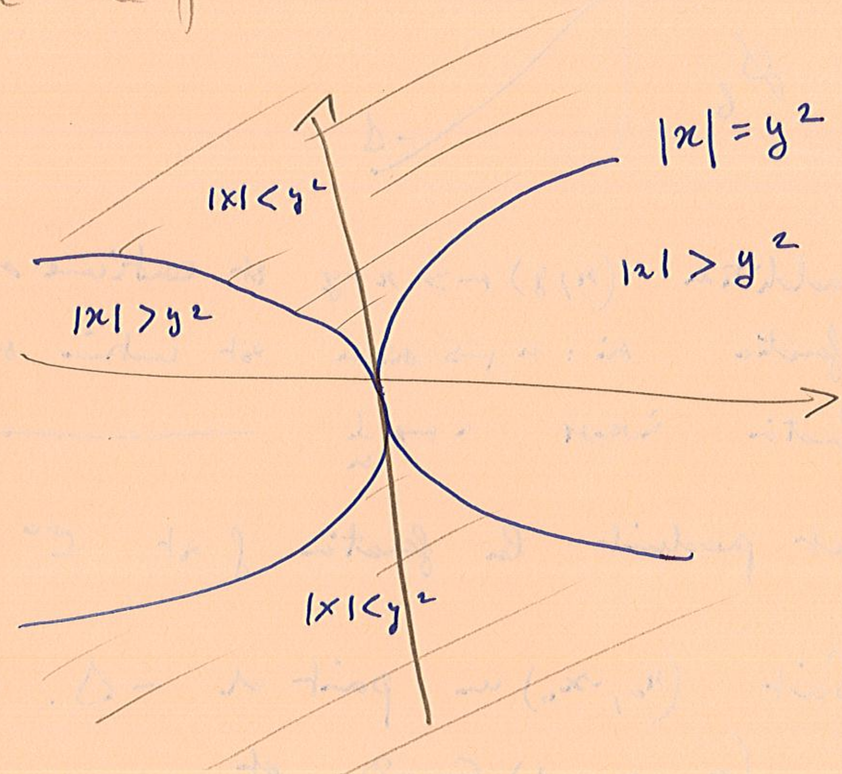
2) $g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\theta\cos\varphi \, , r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$J_f(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\det(J_f)(r,\varphi,\theta) = r^2(\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\cos^2\varphi)}$$
$$\cancel{= r^2\cos\varphi \neq 0.}$$

$$\det(J_f)(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\cos\varphi$$
$$- r^2\cos^3\varphi\cos^2\theta$$
$$- 0$$
$$+ 0 - r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi$$
$$- r^2\cos^3\varphi\sin^2\theta$$
$$= -r^2(\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi\cos\varphi) = -r^2\cos\varphi \neq 0$$

Découpe le plan en 2 domaines :



$$|y|^4 \leq |y|^4 + |x|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|y|^4 + |x|^2} \leq \frac{1}{|y|^4}$$

$$|x|^2 \leq |y|^4 + |x|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|y|^4 + |x|^2} \leq \frac{1}{|x|^2}$$

$$x^2 + |y| > |y| \Rightarrow \frac{1}{|y|} > \frac{1}{x^2+|y|}$$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{x^2+|y|} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|\varepsilon(x,y)| \le \left| \frac{xy^2}{|y|} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$= \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0$$

$$|\varepsilon(h_1,h_2)| = \left| \frac{(a+h_1)^2\, h_2}{(a+h_1)^2 + |h_2|} - h_2^2 \right| \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \left| \frac{\cancel{(a+h_1)^2 h_2} - \cancel{h_2(a+h_1)^2} - |h_2|^2}{(a+h_1)^2 + |h_2|} \right| \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\leq \frac{h_2^2 + h_1^2}{(a+h_1)^2 + |h_2|} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{(a+h_1)^2 + |h_2|} \xrightarrow[(h_1,h_2)) \to (0,0)]{} 0 .$$